第 3 节 比较大小的高阶方法（★★★）

内容提要

由于构造函数比较大小思维量大，不易想到，所以本节归纳了一些二级结论和常用的近似值，用它们可以解决诸多比大小的问题，故本节内容可看成是上一节的补充. 由于本节包含不少超出教材范围的结论，所以同学们可选择性地学习.

1．糖水不等式：设 $a>b>0$，$c>0$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$.

2．常用的泰勒展开式：比较指、对、幂、三角代数式的大小，可考虑用下面的泰勒展开式来估算，需注意下述展开式只在 $x=0$ 附近（$|x|$ 比较小）的近似效果比较好，且阶数越高（保留项数越多），求得的值越精确，一般取展开式的前 3 项就满足精度要求了.

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$；

② $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\cdots$；

③ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$；

④ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$；

⑤ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$.

3．常用的近似值：$\ln 2\approx 0.693$，$\ln 3\approx 1.099\approx 1.1$，$\ln 5\approx 1.609\approx 1.61$，$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$.

典型例题

类型Ⅰ：糖水不等式的应用

【例 1】设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，则 a_____b.（填“>”或“<”）

解析： a 和 b 底数不同，先用换底公式化同底，$a=\log_5 3=\frac{\ln 3}{\ln 5}$，$b=\log_8 5=\frac{\ln 5}{\ln 8}$，

换底后分母不一样，若能变成相同，则更易于比较，可用糖水不等式把分母化为相同，

由糖水不等式，$a=\frac{\ln 3}{\ln 5}<\frac{\ln 3+\ln\frac{8}{5}}{\ln 5+\ln\frac{8}{5}}=\frac{\ln\frac{24}{5}}{\ln 8}<\frac{\ln 5}{\ln 8}=b$.

答案： <

【反思】运用糖水不等式，可以将换底后分母不同的式子化为分母相同，从而只需比较分子，使问题简化.

类型Ⅱ：泰勒展开的运用

【例 2】（2021・全国乙卷）设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则（　　）

（A）$a<b<c$　（B）$b<c<a$　（C）$b<a<c$　（D）$c<a<b$

解析：由题意，$a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201>\ln 1.02=b$，排除 A、D；

观察选项发现只需再比较 a 和 c，可用泰勒展开式来近似计算它们，再比较大小，

由内容提要 2，$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\cdots$，

可以看到，随着 x 的指数升高，当 x 接近 0 时，后面那些项将越来越小，故可取前 3 项来近似计算，

所以 $\ln(1+x)\approx x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$，故 $a=2\ln 1.01=2\ln(1+0.01)\approx 2(0.01-\frac{1}{2}\times 0.01^2+\frac{1}{3}\times 0.01^3)\approx 0.0199$，

在内容提要 2 的式③中令 $a=\frac{1}{2}$ 可得 $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\cdots$

所以 $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$，故 $\sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$，

所以 $c=\sqrt{1.04}-1=\sqrt{1+0.04}-1\approx\frac{1}{2}\times 0.04-\frac{1}{8}\times 0.04^2+\frac{1}{16}\times 0.04^3\approx 0.0198$，从而 $a>c$，排除 C，故选 B.

答案：B

类型Ⅲ：常见对数值的应用

【例 3】若 $a=e^{0.2}$，$b=\sqrt{1.2}$，$c=\ln 3.2$，则（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>b>a$

解析：观察发现 a 可用泰勒展开近似计算，c 可用近似数据估算，

由内容提要 2，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}$，所以 $a=e^{0.2}\approx 1+0.2+\frac{0.2^2}{2}=1.22$，

$b=\sqrt{1.2}<\sqrt{1.21}=1.1$，$c=\ln 3.2=\ln\frac{16}{5}=\ln 16-\ln 5=4\ln 2-\ln 5\approx 4\times 0.693-1.61=1.162$，故 $a>c>b$.

答案：B

【总结】若能记住 $\ln 2$，$\ln 3$，$\ln 5$ 这些常用的对数值，在比较大小的题目中说不定有妙用.

强化训练

1.（★★）设 $a=\log_5 6$，$b=\log_7 8$，则 a______b.（填“>”或“<”）

2.（2022·新高考Ⅰ卷·★★★）设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$c<a<b$　　（D）$a<c<b$

3．（2022 • 全国甲卷 • ★★★★）已知 $a=\frac{31}{32}$， $b=\cos\frac{1}{4}$， $c=4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

（A） $c>b>a$　　（B） $b>a>c$　　（C） $a>b>c$　　（D） $a>c>b$

4．（★★★）已知 $x,y,z\in\mathbf{R}_{+}$，且 $x\ln 2=y\ln 3=z\ln 5$，则（　　）

（A） $2x<3y<5z$　　（B） $5z<2x<3y$　　（C） $3y<5z<2x$　　（D） $3y<2x<5z$